KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka
Poziom rozszerzony

Marzec 2020

Zadania zamknięte

Za każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
1.	B	$\sqrt[3]{3^3} < \sqrt[3]{37} < \sqrt[3]{4^3}$ oraz $\sqrt[5]{4^5} < \sqrt[5]{2019} < \sqrt[5]{5^5}$, stąd $a = 4$
2.	C	$\log_{12}^2 8 + \log_{12} 18 \cdot \log_{12} 1152 = \log_{12}^2 8 + \log_{12} 18 \cdot \log_{12} 8^2 \cdot 18 =$ $= \log_{12}^2 8 + \log_{12} 18(2\log_{12} 8 + \log_{12} 18) =$ $= \log_{12}^2 8 + 2\log_{12} 8 \cdot \log_{12} 18 + \log_{12}^2 18 = (\log_{12} 8 + \log_{12} 18)^2 =$ $= (\log_{12} 144)^2 = 2^2 = 4$
3.	B	Odległość punktu S od siecznej: $d = \frac{\lvert 4 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) + 1 \rvert}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4$ Z twierdzenia Pitagorasa: $r^2 = d^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot 16\right)^2$, stąd $r = 4\sqrt{5}$
4.	D	Z twierdzenia Pitagorasa: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + (2r)^2$, stąd $r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$.

Zadania otwarte – kodowane

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania	Liczba punktów
5.	0 3 3	$f(x) = \frac{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2}{3x^2 + 3x - 18} = \frac{3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x+1)(x-2)}{3(x-2)(x+3)}$; $D = R \setminus \{-3; 2\}$ $x = \frac{1}{3} \vee x = -1$, odp.: $x = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$	2

Zadania otwarte

Uwagi ogólne.

- Jeżeli zdający rozwiąże bezbłędnie zadanie inną metodą, nieopisaną w schemacie, ale merytorycznie poprawną, otrzymuje za to rozwiązanie maksymalną liczbę punktów.
- Za błąd rachunkowy zdający traci 1 punkt, jeżeli błąd ten nie spowodował znacznego ułatwienia lub utrudnienia zadania (wówczas należy potraktować go tak, jakby był błędem rzeczowym).
- Jeżeli zdający popełni błąd merytoryczny, otrzymuje punkty tylko za tę część zadania, którą rozwiązał do momentu popełnienia tego błędu, dalsza część nie jest oceniania (więc jeżeli zostanie on popełniony na początku, zdający otrzymuje za zadanie 0 punktów).
- Jeżeli zdający źle przepisze dane liczbowe z zadania, ale nie spowoduje to zmiany sensu zadania bądź nie ułatwi rozwiązania, wówczas za całe zadanie traci 1 punkt.
- Jeżeli zdający prawidłowo rozwiąże zadanie, ale podczas zapisywania odpowiedzi źle przepisze rozwiązanie, należy potraktować to jako błąd nieuwagi, za który zdający nie traci punktu.
- Jeżeli punkt ma być przyznany za zapisanie układu kilku równań, to równania te nie muszą być zapisane jedno pod drugim i połączone klamrą, wystarczy, że będą zapisane (w różnych miejscach).

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
6.	**Postęp:** Obliczenie pochodnej funkcji: $f'(x)=\dfrac{2}{(x+3)^2}$ ALBO Zapisanie warunku: $f'(x_0)=2$	1
	Istotny postęp: Obliczenie $f'(-2)=2$, poprawna interpretacja tej liczby jako współczynnika kierunkowego stycznej.	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapis równania stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P: $y=2x+1$	3
	Uwaga Jeżeli zdający wyznacza błędnie pochodną funkcji i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy równanie stycznej, to otrzymuje 1 punkt.	
7.	**Postęp:** Zapis nierówności w postaci: $(x+1)(x^3+2x^2+4x+3)\geq 0$ (Zdający zauważy, że pierwiastkiem wyjściowego wielomianu jest liczba 1 oraz poprawnie podzieli wielomiany.)	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapis nierówności w postaci: $(x+1)^2(x^2+x+3)\geq 0$ (Zdający zauważy, że pierwiastkiem wielomianu x^3+2x^2+4x+3 jest liczba 1 oraz poprawnie podzieli wielomiany.)	2
	Rozwiązanie bezbłędne: Zapis, że trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych (np. $\Delta<0$), oraz uzasadnienie, że dana nierówność jest zawsze prawdziwa dla $x\in R$.	3

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
8.	**Postęp:** Zauważenie, że $\sin(\alpha+\beta)=\sin\left(180^\circ-(\alpha-\beta)\right)$ oraz że jest to sinus kąta przy wierzchołku C.	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Skorzystanie z twierdzenia sinusów np. dla prawej strony równości: $\dfrac{\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}}{\frac{a}{2R}}$	2
	Rozwiązanie bezbłędne: Uzasadnienie równości: $\dfrac{bc}{2aR}=\dfrac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$	3
9.	**Postęp:** Skorzystanie ze wzoru na sinus podwójnego kąta i przekształcenie równania do: $4\sin2x\cos2x+2\sqrt{3}\cos2x-2\sin2x-\sqrt{3}=0$	1
	Istotny postęp: Przekształcenie równania do postaci: $(2\cos2x-1)\left(2\sin2x+\sqrt{3}\right)=0$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapis wszystkich rozwiązań równań $\cos2x=\dfrac{1}{2}$ i $\sin2x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych, czyli: $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in C\vee x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in C\vee x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in C$ ALBO Zapis rozwiązania jednego z równań: $\cos2x=\dfrac{1}{2}$ lub $\sin2x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ w zbiorze $\langle 0,2\pi\rangle$	3
	Rozwiązanie bezbłędne: $x\in\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{11\pi}{6}\right\}$	4
10.	**Postęp:** Wprowadzenie oznaczeń: A – wylosowanie co najmniej jednego losu wygrywającego A' – wylosowanie dwóch losów przegrywających Zapisanie nierówności wynikającej z treści zadania z wykorzystaniem wzoru $P(A)=1-P(A')$: $1-P(A')>\dfrac{11}{30}$	1
	Istotny postęp: Obliczenie prawdopodobieństwa $P(A')$: $P(A')=\dfrac{4n}{5n}\cdot\dfrac{4n-1}{5n-1}$, gdzie $n\in N_+$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie nierówności $1-\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{4n-1}{5n-1}>\dfrac{11}{30}$ oraz doprowadzenie jej do postaci: $30(-n+5)(5n-1)>0$	3
	Rozwiązanie bezbłędne: Podanie rozwiązań nierówności z uwzględnieniem warunków zadania: $n\in\{1,2,3,4\}$ Uwaga Jeśli zdający obliczy prawdopodobieństwo dla konkretnych przypadków i poda poprawny wynik, przyznajemy 0 punktów.	4

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
11.	Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów: Etap I polega na zbadaniu warunku istnienia dwóch pierwiastków, za ten etap zdający może otrzymać 1 punkt. Etap II polega na zbadaniu warunku podanego w zadaniu, za ten etap zdający może otrzymać 3 punkty. Etap III to podanie rozwiązania. Za ten etap zdający otrzymuje 1 punkt. Punkty za etap I i II zdobywane są niezależnie od siebie, punkt za etap III przyznawany jest tylko wtedy, gdy prawidłowo rozwiązane są etapy I i II (z ewentualnymi błędami rachunkowymi).	
	Etap I Rozwiązanie nierówności $\Delta \geq 0$: $m \in R$	1
	Etap II • Zapisanie układu równań: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - 2m \\ 2x_1 - 6x_2 = 14 \end{cases}$ • Wyznaczenie x_1 oraz x_2: $\begin{cases} x_1 = \frac{5-3m}{2} \\ x_2 = \frac{-m-3}{2} \end{cases}$ • Zapisanie równania dla iloczynu x_1x_2: $\frac{(5-3m)(-m-3)}{4} = 4m - 6$ Po jednym punkcie zdający otrzymuje za każdą z powyższych czynności.	3
	Etap III Wyznaczenie szukanych wartości parametru m z uwzględnieniem wszystkich warunków: $m = 1 \vee m = 3$	1
12.	Wprowadzenie oznaczeń, np.: a, b – krawędzie podstawy c – wysokość bryły e – przekątna ściany bocznej o wymiarach $a \times c$ i kącie α między tą przekątną a krawędzią a f – przekątna ściany bocznej o wymiarach $b \times c$ i kącie β między tą przekątną a krawędzią b γ – kąt między przekątnymi ścian bocznych	
	Postęp: Poprawne zaznaczenie kąta γ na rysunku.	1
	Istotny postęp: Uzależnienie długości boków od jednej zmiennej, np. c: $a = \frac{c}{\text{tg}\alpha}$, $b = \frac{c}{\text{tg}\beta}$, $e = \frac{c}{\sin\alpha}$, $f = \frac{c}{\sin\beta}$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zastosowanie twierdzenia cosinusów w trójkącie o bokach długości e, f, $\sqrt{a^2+b^2}$ i kącie γ naprzeciwko boku o długości $\sqrt{a^2+b^2}$: $\frac{c^2}{\text{tg}^2\alpha} + \frac{c^2}{\text{tg}^2\beta} = \frac{c^2}{\sin^2\beta} + \frac{c^2}{\sin^2\alpha} - 2 \cdot \frac{c^2}{\sin\alpha\sin\beta} \cdot \cos\gamma$	3
	Rozwiązanie prawie pełne: Doprowadzenie równania do postaci: $\frac{2}{\sin\alpha\sin\beta} \cdot \cos\gamma = 2$	4
	Rozwiązanie bezbłędne: Wyznaczenie cosinusa kąta γ: $\cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta$	5

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
13.	**Postęp:** Zapis układu równań z dwiema niewiadomymi (a – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, q – iloraz tego ciągu): $\begin{cases} a\left(1+q+q^2\right)=26 \\ 2(aq+4)=a\left(1+q^2\right) \end{cases}$	1
	Istotny postęp: Zapis równania z jedną niewiadomą, np.: $\frac{52q}{1+q+q^2}+8=\frac{26+26q^2}{1+q+q^2}$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} a=2 \\ q=3 \end{cases}$	3
	Rozwiązanie bezbłędne: Podanie odpowiedzi: $(2, 6, 18)$	4
14.	**Postęp:** Zapis współrzędnych punktu C (lub D) za pomocą jednej zmiennej: $C=\left(x;\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)$ (lub $D=\left(x;\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}\right)$) oraz obliczenie kwadratu długości odcinka $\lvert AB\rvert$: $\lvert AB\rvert^2=40$	1
	Istotny postęp: Zapis równania $\lvert BC\rvert^2=\lvert AB\rvert^2$ (lub $\lvert AD\rvert^2=\lvert AB\rvert^2$) za pomocą jednej zmiennej: $(x-7)^2+\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}-5\right)^2=40$ (lub $(x-1)^2+\left(\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}-3\right)^2=40$)	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Obliczenie współrzędnych punktu C (lub D): $C=(5,-1)$ (lub $D=(-1,-3)$) Obliczenie współrzędnych punktu D (lub C) na przykład poprzez wykorzystanie równości wektorów $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ (lub $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$): $D=(-1,-3)$ (lub $C=(5,-1)$) Zdający otrzymuje po 1 punkcie za każdą z tych czynności.	4
	Rozwiązanie prawie pełne: Obliczenie środka okręgu S i promienia r (lub r^2): $S=S_{AC}=(3;1)$, $r=d\left(S_{AC},CD\right)=\frac{8}{\sqrt{10}}$, $r^2=\frac{32}{5}$	5
	Rozwiązanie bezbłędne: Zapisanie równania okręgu: $(x-3)^2+(y-1)^2=\frac{32}{5}$	6
	Uwagi 1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać 5 punktów, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozwiązania zadania na żadnym etapie. 2. Jeżeli zdający odczytuje z rysunku współrzędne środków odcinków, a następnie wyznacza równania stycznych i na tym poprzestaje, to może otrzymać 1 punkt.	

Numer zadania	**Modelowe etapy rozwiązywania zadania**	**Liczba punktów**
15.	Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów: Etap I polega na zapisaniu współrzędnych punktu C za pomocą jednej zmiennej, wyznaczeniu kwadratów długości odcinków AC i BC oraz wyznaczeniu wzoru funkcji jednej zmiennej opisującej sumę kwadratów odcinków AC i BC oraz jej dziedziny, za ten etap zdający otrzymuje 3 punkty. Etap II polega na obliczeniu pochodnej funkcji, jej miejsc zerowych i zbadaniu z uzasadnieniem, gdzie funkcja osiąga wartość najmniejszą, za ten etap zdający otrzymuje 3 punkty. Etap III to podanie rozwiązania (współrzędnych punktu C oraz sumy kwadratów odległości między punktami A i C oraz B i C), za ten etap zdający otrzymuje 1 punkt.	
	Etap I Zapisanie współrzędnych punktu C za pomocą jednej zmiennej: $C=\left(x,x^2-1\right)$ oraz wyznaczenie JEDNEGO kwadratu długości odcinka: $\lvert AC\rvert^2=(x-8)^2+\left(x^2-1-3\right)^2$ ALBO $\lvert BC\rvert^2=(x-16)^2+\left(x^2-1+2\right)^2$ Wyznaczenie kwadratów długości odcinków AC i BC: $\lvert AC\rvert^2=(x-8)^2+\left(x^2-1-3\right)^2$ oraz $\lvert BC\rvert^2=(x-16)^2+\left(x^2-1+2\right)^2$ Wyznaczenie wzoru funkcji jednej zmiennej opisującej sumę kwadratów odcinków AC i BC oraz jej dziedziny: $f(x)=2x^4-4x^2-48x+337$, dla $x\in R$ Za każdą część tego etapu zdający otrzymuje po 1 punkcie, przy czym, jeżeli zdający od razu zapisze poprawnie wzór funkcji f w zależności od jednej zmiennej, to otrzymuje maksymalną liczbę punktów za ten etap.	3
	Uwaga: Jeżeli zdający nie zapisał dziedziny funkcji f, przyjmujemy, że założył on, że dziedzina jest zbiorem liczb rzeczywistych i nie odejmujemy punktów za brak zapisu.	
	Etap II Wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej: $f'(x)=8x^3-8x-48$, dla $x\in R$ Obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji f: $x=2$ Zbadanie znaku pochodnej funkcji f i uzasadnienie, że dla $x=2$ funkcja f osiąga wartość najmniejszą.	3
	Uwagi: 1. Znak pochodnej zdający może zaznaczyć, np. na rysunku szkicując krzywą zbliżoną do wykresu pochodnej. 2. Jeżeli zdający obliczy pochodną funkcji f z błędem rachunkowym i otrzyma jako f' funkcję liniową albo funkcję kwadratową oraz konsekwentnie doprowadzi zadanie do końca, to może otrzymać punkty za I etap rozwiązania oraz maksymalnie 1 punkt za II i III etap.	
	Etap III Obliczenie współrzędnych punktu C: $C=(2,3)$ Obliczenie sumy kwadratów odległości między punktami A i C oraz B i C: $f(2)=257$ Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje 1 punkt.	1