KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

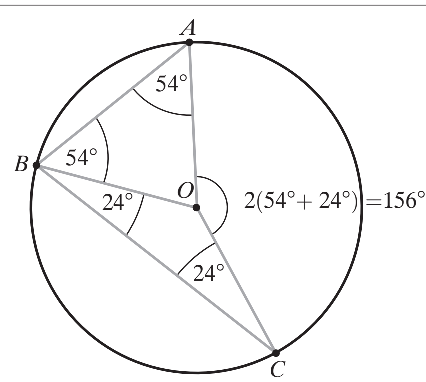
Matematyka
Poziom podstawowy

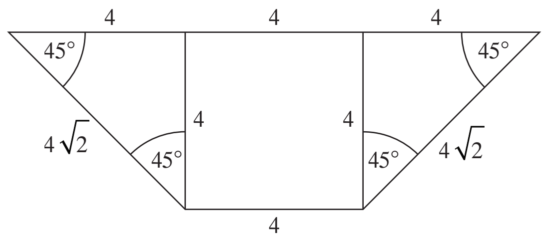
Marzec 2019

Zadania zamknięte

Za każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
1.	D	$\frac{8^9\cdot 9^8}{72^8}=\frac{8^9\cdot 9^8}{(8\cdot 9)^8}=\frac{8^9\cdot 9^8}{8^8\cdot 9^8}=8^{9-8}\cdot 9^{8-8}=8^1\cdot 9^0=8\cdot 1=8$
2.	D	$\sqrt{5\sqrt[3]{5}}=\sqrt{\sqrt[3]{5^3\cdot 5}}=\sqrt[6]{5^4}=\sqrt[6]{625}$
3.	C	$5\log_3 2-2\log_3 5=\log_3 2^5-\log_3 5^2=\log_3 32-\log_3 25=\log_3\frac{32}{25}$
4.	D	Jeżeli bok drugiego kwadratu zostanie oznaczony jako a, to wówczas bok pierwszego kwadratu będzie miał długość $130\%\cdot a=1{,}3a$. Przy takich oznaczeniach pole drugiego kwadratu wynosi a^2, a pierwszego wynosi $1{,}3a\cdot 1{,}3a=1{,}69a$. Stąd pierwsze pole jest większe od drugiego o $\frac{1{,}69a^2-a^2}{a^2}\cdot 100\%=69\%$.
5.	A	$(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2=(3\sqrt{2})^2-2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{3}+\left(3\sqrt{3}\right)^2=$ $=18-12\sqrt{6}+12+8+12\sqrt{6}+27=65$
6.	B	$7\le 4x-5<11\Leftrightarrow 7+5\le 4x<11+5\Leftrightarrow 12\le 4x<16\Leftrightarrow\frac{12}{4}\le x<\frac{16}{4}\Leftrightarrow 3\le x<4\Leftrightarrow x\in\langle 3;4)$
7.	A	Należy zauważyć, że ciąg (a_n) jest arytmetyczny o różnicy równej -8, pierwszym wyrazie $a_1=16$ i $a_8=-40$. Ze wzoru na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego wynika, że $S_8=\frac{16-40}{2}\cdot 8=-96$.
8.	C	Miejscem zerowym funkcji jest liczba, dla której wartość funkcji wynosi 0. Zatem miejscem zerowym podanej funkcji będzie liczba spełniająca równanie $0=\frac{1}{2}-\sqrt{2}x$, czyli równoważnie $\frac{1}{2}=\sqrt{2}x$, stąd $\frac{1}{2\sqrt{2}}=x$, a więc ostatecznie $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$.
9.	D	Należy wyznaczyć współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A i B: $\frac{1-2}{2-(-1)}=-\frac{1}{3}$. Symetralna odcinka AB jest prostopadła do prostej przechodzącej przez punkty A i B. Stąd $-a=3$, czyli $a=-3$.
10.	C	Po przemnożeniu pierwszego równania danego układu przez 2 należy dodać oba równania stronami. Otrzymamy wówczas równanie $0=6+a$. Zatem dla $a=-6$ dany układ jest nieoznaczony.
11.	D	Do dziedziny funkcji $f(x)=\frac{3x+2}{x^2+5x-6}$ należą wszystkie liczby rzeczywiste, z wyjątkiem miejsc zerowych mianownika. Należy rozwiązać równanie $x^2+5x-6=0$. Otóż $\Delta=5^2-4\cdot 1\cdot(-6)=25+24=49$. Stąd $x_1=\frac{-5+7}{2}=\frac{2}{2}=1$, $x_2=\frac{-5-7}{2}=\frac{-12}{2}=-6$. Zatem dziedzina danej funkcji to zbiór $R\setminus\{-6,1\}$.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
12.	D	$f(0)=0^2-b\cdot 0+c=c$, ale z rysunku wynika, że $f(0)>0$, zatem $c>0$. Ponadto wierzchołek paraboli znajduje się w punkcie o współrzędnej odciętej równej $\frac{-(-b)}{2}=\frac{b}{2}$. Na rysunku widać, że odcięta wierzchołka jest ujemna, stąd $b<0$.
13.	A	Należy przekształcić wzór funkcji do postaci ogólnej: $f(x)=2(x+3)(4-x)=-2x^2+2x+24$, a następnie doprowadzić funkcję $f(x)$ do postaci kanonicznej: $f(x)=-2x^2++2x+24=-2\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+24\frac{1}{2}=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+24\frac{1}{2}$. Funkcja osiąga wartość największą równą $24\frac{1}{2}$ dla $x=\frac{1}{2}$. Zatem funkcja jest malejąca dla $x\in\left\langle\frac{1}{2},+\infty\right)$.
14.	C	Po przemnożeniu obu stron równania $\frac{x+3}{x-2}=4$ przez $x-2$ otrzymamy równanie $x+3=4(x-2)\Leftrightarrow x+3=4x-8\Leftrightarrow 3x=11\Leftrightarrow x=\frac{11}{3}=3\frac{2}{3}$. Zatem rozwiązanie równania należy do przedziału $\langle 3;4)$.
15.	C	$2019=7\cdot 288+3$, stąd $a_{2019}=3$
16.	A	W podanym ciągu geometrycznym zachodzi równość $x^2=5\cdot 125$. Zatem $x^2=625$, stąd $x=25$ lub $x=-25$. Ponieważ ciąg jest niemonotoniczny, więc $x=-25$.
17.	A	$\operatorname{tg}\sphericalangle ADE=\frac{AE}{AD}=\frac{\frac{1}{2}AB}{AD}$. Ponieważ $ABCD$ jest kwadratem, więc $AB=AD$. Stąd $\operatorname{tg}\sphericalangle ADE=\frac{1}{2}$.
18.	D	Przekątna kwadratu, a więc i długość średnicy okręgu opisanego na kwadracie ma długość $\sqrt{(-2-2)^2+(-4-(-1))^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$. Zatem promień okręgu opisanego na kwadracie ma długość 2,5.
19.	D	 Zauważmy, że $\sphericalangle ACO=54^\circ$ i $\sphericalangle BCO=24^\circ$. Wówczas $\sphericalangle ACO+\sphericalangle BCO=54^\circ+24^\circ=78^\circ$. Kąt ACO jest oparty na łuku AB i jest to kąt wpisany. Na tym samym łuku jest oparty kąt środkowy AOB. Miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego (jeżeli oba kąty są oparte na tym samym łuku). Zatem kąt $\alpha=156^\circ$.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
20.	B	 Z rysunku widzimy, że pole trapezu (zgodnie ze wzorem na pole trapezu) wynosi: $\frac{(4+12)\cdot 4}{2}=32$
21.	C	Z każdego wierzchołka górnej podstawy graniastosłupa o podstawie siedmiokąta wychodzą cztery przekątne. Zatem liczba przekątnych w graniastosłupie prawidłowym siedmiokątnym wynosi $\frac{7\cdot 4}{2}=14$ (każda przekątna w iloczynie $7\cdot 4$ jest liczona dwukrotnie, dlatego iloczyn ten jest dzielony przez 2).
22.	D	Jeżeli przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku długości 8, to wysokość walca *h* wynosi 8, natomiast promień *r* podstawy wynosi 4. Stąd objętość walca jest równa: $\pi\cdot r^2\cdot h=\pi\cdot 4^2\cdot 8=128\pi$
23.	D	Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $\overline{\Omega}=9\cdot 10=90$ (jest 90 liczb dwucyfrowych). Wśród tych 90 liczb jest 9 liczb o takich samych cyfrach. Jeżeli przez *A* oznaczymy zdarzenie sprzyjające wylosowaniu liczby dwucyfrowej o różnych cyfrach, to *A* oznacza zdarzenie wylosowania liczby dwucyfrowej o takich samych cyfrach. Stąd: $P(A)=1-P(A')=1-\frac{9}{90}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}=0{,}9$
24.	C	Liczby pierwsze, które mogą być cyframi liczby trzycyfrowej, to $\{2,3,5,7\}$. Ponieważ cyfry w liczbie trzycyfrowej nie mogą się powtarzać, więc liczba możliwości stworzenia takiej liczby trzycyfrowej wynosi $4\cdot 3\cdot 2=24$.
25.	C	Aby wyznaczyć medianę danego zbioru liczb, należy uporządkować te liczby w porządku niemalejącym, a następnie znaleźć średnią arytmetyczną dwóch środkowych liczb. Dwie środkowe liczby to po uporządkowaniu liczby o numerze 13 i 14. Tymi liczbami w ciągu będą liczby 3 i 4. Ich średnia arytmetyczna wynosi $\frac{3+4}{2}=3{,}5$.

Zadania otwarte

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
26.	Postęp: Przekształcenie nierówności równoważnej: $3x\left(x+\frac{1}{2}\right)-4\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\leq 0$ $\left(x+\frac{1}{2}\right)(3x-4\left(x-\frac{1}{4}\right))\leq 0$ $\left(x+\frac{1}{2}\right)(3x-4x+1)\leq 0$ $\left(x+\frac{1}{2}\right)(1-x)\leq 0$ $-\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)\leq 0$ Wyznaczenie pierwiastków funkcji kwadratowej znajdującej się po lewej stronie nierówności: $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=1$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Rozwiązanie nierówności: $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right\rangle\cup\langle 1,+\infty)$	2
27.	Postęp: Przekształcenie lewej strony danej równości $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)\cdot(1-\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{1^2-\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Skorzystanie z tożsamości trygonometrycznej: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$	2
28.	Postęp: Wyznaczenie środka $S=(x_s,y_s)$ odcinka *AB*. $x_s=\frac{4+2}{2}=3$ $y_s=\frac{5+(-3)}{2}=1$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Wyliczenie długości środkowej *CS*: $CS=\sqrt{(3-(-3))^2+(1-2)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}$	2
29.	Postęp: Zauważenie, że trójkąty *ABD* i *PED* są podobne (cecha k,k,k). Uzyskanie stąd równości: $\frac{AB}{AD}=\frac{PE}{DE}$ czyli równości: $\frac{2}{3}=\frac{PE}{12}$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Wyliczenie długości odcinka *PE*: $PE=\frac{2\cdot 12}{3}=8$	2
30.	Postęp: Równoważne przekształcenie nierówności: $4a^2+11b^2-12ab\geq 0$ $(2a)^2-2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2+2b^2\geq 0$ $(2a-3b)^2+2b^2\geq 0$. Wykorzystanie wzoru na kwadrat różnicy.	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Zapisanie wniosku. Kwadrat liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, zatem $(2a-3b)^2\geq 0$ i $2b^2\geq 0$. Suma kwadratów dwóch liczb nieujemnych jest nieujemna.	2

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
31.	Postęp: $\{2,7,9,12,15\}$ Wyliczenie liczby zdarzeń elementarnych: $\overline{\Omega}=5\cdot 5=25$ (wariacje z powtórzeniami) Opisanie zbioru zdarzeń elementarnych sprzyjających wylosowaniu dwóch liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6: $A=\{(2,9),(2,12),(2,15),(9,2),(9,12),(12,2),(12,9),(12,15),(15,2),(15,12)\}$ Wyliczenie mocy zbioru A: $\overline{A}=10$	1
	Rozwiązanie bezbłędne: Wyliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia wylosowania dwóch liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6: $P(A)=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$	2
32.	Postęp: Wyliczenie długości krawędzi podstawy. Skoro $P_b=3\sqrt{3}$, to oznaczając krawędź podstawy przez a, powstanie równość $3\cdot\frac{2\sqrt{3}\cdot a}{2}=3\sqrt{3}$, stąd $a=1$.	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Ułożenie równania umożliwiającego wyliczenie wysokości ostrosłupa. Wysokość ostrosłupa to przyprostokątna w trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej równej wysokości ściany bocznej i drugiej przyprostokątnej równej $\frac{1}{3}$ wysokości podstawy ostrosłupa, czyli $\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$. Zatem z twierdzenia Pitagorasa w takim trójkącie prostokątnym otrzymujemy równość $H^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$.	2
	Wyliczenie wysokości ostrosłupa z równania: $H^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2$ $H=\frac{\sqrt{429}}{6}$	3
	Rozwiązanie bezbłędne: Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_p=\frac{1^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ Wyliczenie objętości ostrosłupa: $V=\frac{1}{3}\cdot P_p\cdot H=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{429}}{6}=\frac{\sqrt{143}}{24}$	4
33.	Postęp: Przyjęcie oznaczeń zgodnych z treścią zadania: r – różnica ciągu arytmetycznego q – iloraz ciągu geometrycznego $a_1=9$ $a_2=9q+2=9+r$ $a_3=9+2r=9q^2$	1

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie układu równań i rozwiązanie go: $\begin{cases}9q+2=9+r\\ 9+2r=9q^2\end{cases}$ $\begin{cases}q=\frac{1}{3}\\ r=-4\end{cases}$ lub $\begin{cases}q=\frac{5}{3}\text{zz}\\ r=8\end{cases}$	3 (2 pkt gdy popełniono błąd rachunkowy lub wyznaczono tylko jedną parę rozwiązań)
	Rozwiązanie bezbłędne: Wyznaczenie ciągów: ciąg arytmetyczny $(9, 5, 1)$ lub $(9, 17, 25)$ ciąg geometryczny $(9, 3, 1)$ lub $(9, 15, 25)$	4
34.	Postęp: Znalezienie współrzędnych punktu B. Obliczenie miejsca zerowego funkcji $y=-4x+8$: $x_0=2$. Zatem współrzędne punktu B to $(2, 0)$.	1
	Istotny postęp: Wyznaczenie równania prostej przechodzącej przez punkty A i P poprzez rozwiązanie układu równań: $\begin{cases}0=-6a+b\\ 12=4a+b\end{cases}$ $\begin{cases}a=\frac{6}{5}\\ b=\frac{36}{5}\end{cases}$ Równanie szukanej prostej jest postaci: $y=\frac{6}{5}x+\frac{36}{5}$	2
	Pokonanie zasadniczych trudności: Wyznaczenie współrzędnych punktu C poprzez rozwiązanie układu równań: $\begin{cases}y=-4x+8\\ y=\frac{6}{5}x+\frac{36}{5}\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{2}{13}\\ y=\frac{96}{13}\end{cases}$ Zatem: $C=\left(\frac{2}{13}, \frac{96}{13}\right)$	3
	Rozwiązanie prawie całkowite: Wyznaczenie długości podstawy AB i wysokości h opuszczonej z wierzchołka C na tę podstawę: $AB=\lvert 2-(-6)\rvert=8$ $h=\frac{96}{13}$	4
	Rozwiązanie bezbłędne: Obliczenie pola trójkąta ABC: $P_{ABC}=\frac{8\cdot\frac{96}{13}}{2}=\frac{384}{13}$	5