KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka
Poziom rozszerzony

Marzec 2019

Zadania zamknięte

Za każdą poprawną odpowiedź zdający otrzymuje 1 punkt.

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania
1.	C	Obliczenie wartości funkcji: $f(x)=x^2-3x$ dla $x=m+2$ i $x=2m$. Stąd powstaje równość: $(m+2)^2-3(m+2)=(2m)^2-3\cdot 2m$, którą następnie należy przekształcić równoważnie: $m^2+4m+4-3m-6=4m^2-6m \Leftrightarrow 3m^2-7m+2=0$. Rozwiązaniami ostatniej równości są liczby 2 i $\frac{1}{3}$. Zatem $2+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$.
2.	D	Skoro $\left(2, \operatorname{tg}x, \operatorname{tg}x-\frac{1}{2}\right)$ jest ciągiem geometrycznym, to $\operatorname{tg}^2 x=2\cdot\left(\operatorname{tg}x-\frac{1}{2}\right)$. Stąd zaś: $\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+1=0$. Zatem $(\operatorname{tg}x-1)^2=0$, czyli $\operatorname{tg}x=1$, a więc $x=\frac{\pi}{4}$.
3.	B	Należy zauważyć, że zgodnie z twierdzeniem o kącie między styczną i sieczną $\sphericalangle DCB=\sphericalangle BAC$. Ponadto $\sphericalangle DBC=\sphericalangle ABC$. Zatem zgodnie z cechą „kąt, kąt, kąt” trójkąty DCB i BAC są podobne. Stąd zaś równość: $\frac{DB}{BC}=\frac{CD}{AC}$, czyli $\frac{DB}{12}=\frac{8}{10}$. Zatem $DB=9,6$.
4.	C	Oznaczenie przez H wysokości ostrosłupa. Wówczas krawędź podstawy ma długość $2H$, natomiast wysokość podstawy $h=\frac{2H\sqrt{3}}{2}=H\sqrt{3}$. Rozważmy trójkąt prostokątny o wierzchołkach w wierzchołku ostrosłupa leżącym naprzeciw podstawy, spodku wysokości ostrosłupa i środku jednej z krawędzi podstawy. Przyprostokątne tego trójkąta mają długości H i $\frac{1}{3}H\sqrt{3}$. Stąd tangens kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy wynosi $\frac{H}{\frac{1}{3}H\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$. Szukany kąt ma więc miarę 60°.
5.	D	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(3+3n)\cdot n}{2}}{n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n(n+1)}{2(n-1)(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{3}{2}$

Zadania otwarte – kodowane

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania	Liczba punktów
6.	1 2 5	Dany nieskończony ciąg geometryczny jest szeregiem geometrycznym. Oznaczenia: a_1 – pierwszy wyraz szeregu, $a_1\neq 0$, q – iloraz szeregu, $\lvert q\rvert<1$. Z treści zadania wynika równość: $\frac{a_1}{1-q}=9\cdot\frac{a_1\cdot q}{1-q^2}$, która jest równoważna równości $\frac{a_1}{1-q}=\frac{9a_1\cdot q}{(1-q)(1+q)}$. Stąd zaś: $1+q=9q$, czyli $q=\frac{1}{8}=0,125$.	0–2

Numer zadania	Poprawna odpowiedź	Wskazówki do rozwiązania zadania	Liczba punktów
7.	2 7 7	W każdym rzucie kostką może wypaść jedna z sześciu liczb: 1, 2, 3, 4, 5, 6, więc wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia jest $\overline{\Omega} = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$. Należy obliczyć, ile wśród tych zdarzeń jest takich, że w każdym rzucie kostką wypadła inna liczba oczek. W pierwszym rzucie może wypaść jedna z 6 liczb, w drugim jedna z pozostałych 5, w trzecim jedna z pozostałych 4, w czwartym rzucie są już tylko trzy możliwości. Stąd liczba zdarzeń sprzyjających wypadnięciu w każdym z czterech rzutów kostką innej liczby oczek wynosi $\overline{A} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$. Zatem $P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{5}{18}$.	0–2

Zadania otwarte

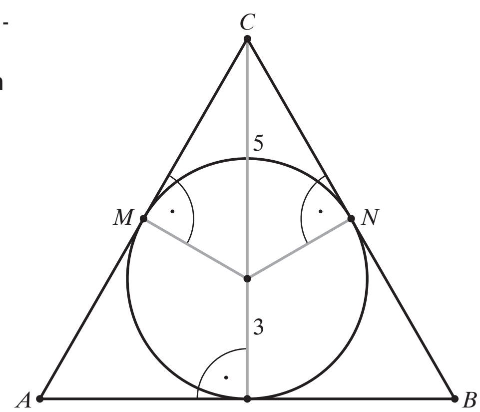
Uwagi ogólne.

- Jeżeli zdający rozwiąże bezbłędnie zadanie inną metodą, nieopisaną w schemacie, ale merytorycznie poprawną, otrzymuje za to rozwiązanie maksymalną liczbę punktów.
- Za błąd rachunkowy zdający traci 1 punkt, jeżeli błąd ten nie spowodował znacznego ułatwienia lub utrudnienia zadania (wówczas należy potraktować go tak, jakby był błędem rzeczowym).
- Jeżeli zdający popełni błąd merytoryczny, otrzymuje punkty tylko za tę część zadania, którą rozwiązał do momentu popełnienia tego błędu, dalsza część nie jest oceniania (więc jeżeli zostanie on popełniony na początku, zdający otrzymuje za zadanie 0 punktów).
- Jeżeli zdający źle przepisze dane liczbowe z zadania, ale nie spowoduje to zmiany sensu zadania bądź nie ułatwi rozwiązania, wówczas za całe zadanie traci 1 punkt.
- Jeżeli zdający prawidłowo rozwiąże zadanie, ale podczas zapisywania odpowiedzi źle przepisze rozwiązanie, należy potraktować to jako błąd nieuwagi, za który zdający nie traci punktu.
- Jeżeli punkt ma być przyznany za zapisanie układu kilku równań, to równania te nie muszą być zapisane jedno pod drugim i połączone klamrą, wystarczy, że będą zapisane (w różnych miejscach).

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
8.	Należy zauważyć, że $\log_a b > 0, \log_a c > 0$. Następnie trzeba przekształcić daną nierówność równoważnie, korzystając kolejno ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu i ze wzoru na sumę logarytmów o tej samej podstawie: $\log_c a + \log_b a \geq 4\log_{bc} a$ $\frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_a b} \geq \frac{4}{\log_a bc}$ $\frac{\log_a b + \log_a c}{\log_a c \cdot \log_a b} \geq \frac{4}{\log_a bc}$ $\frac{\log_a b + \log_a c}{\log_a c \cdot \log_a b} \geq \frac{4}{\log_a b + \log_a c}$ $(\log_a b + \log_a c)^2 \geq 4\log_a c \cdot \log_a b$ $(\log_a b)^2 + 2 \cdot \log_a b \cdot \log_a c + (\log_a c)^2 \geq 4\log_a c \cdot \log_a b$ $(\log_a b)^2 - 2 \cdot \log_a b \cdot \log_a c + (\log_a c)^2 \geq 0$ $(\log_a b - \log_a c)^2 \geq 0$ Ostatnia z otrzymanych nierówności jest prawdziwa dla dowolnych liczb $a, b, c > 1$ (kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny), więc prawdziwa jest również równoważna jej nierówność $\log_c a + \log_b a \geq 4\log_{bc} a$.	0–3

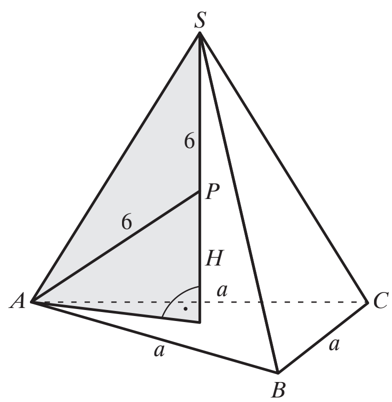
Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Istotny postęp: Zastosowanie własności działań na logarytmach do sprowadzenia nierówności do postaci: $(\log_a b)^2 - 2\cdot\log_a b\cdot\log_a c + (\log_a c)^2 \geq 0$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Sprowadzenie nierówności do postaci: $(\log_a b - \log_a c)^2 \geq 0$ przy wykorzystaniu wzoru skróconego mnożenia	2
	Rozwiązanie pełne: Uzasadnienie prawdziwości nierówności: $(\log_a b - \log_a c)^2 \geq 0$	3
9.	Należy znaleźć pierwiastki równania $5\cdot 2^{x+1} = 16 + 4^x$ oraz przekształcić to równanie równoważnie $10\cdot 2^x = 16 + (2^x)^2$. Podstawmy teraz $t = 2^x$, gdzie $t > 0$. Stąd $10t = 16 + t^2$, czyli $t^2 - 10t + 16 = 0$. Rozwiązaniami ostatniego równania są liczby 2 i 8. Punkt $A = (2, 8)$ należy do prostej równoległej do prostej $3y + 2x - 4 = 0$. Prosta równoległa do danej ma równanie: $3y + 2x + C = 0$. Aby znaleźć wartość C, należy podstawić do ostatniej równości $x = 2$ i $y = 8$. Ostatecznie $C = -28$ i równanie szukanej prostej to $3y + 2x - 28 = 0$.	0–3
	Istotny postęp: Doprowadzenie danej równości do postaci $10\cdot 2^x = 16 + (2^x)^2$, która po podstawieniu $t = 2^x$ staje się równaniem kwadratowym.	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Rozwiązanie równania kwadratowego $t^2 - 10t + 16 = 0$. Znalezienie rozwiązań 2 i 8.	2
	Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie równania prostej równoległej do prostej $3y + 2x - 4 = 0$ i przechodzącej przez punkt $A = (2; 8)$, czyli prostej $3y + 2x - 28 = 0$.	3
10.	Należy przemnożyć drugie równanie z równości rekurencyjnej przez $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Uzyskamy wówczas równość $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})a_{n+1} = a_n + \sqrt{3}$, czyli po zastosowaniu wzoru skróconego mnożenia równość $a_{n+1} = a_n + \sqrt{3}$. Z równość tej wynika, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $\sqrt{3}$. Należy zauważyć, że ciąg utworzony z trzydziestu pierwszych wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych jest również ciągiem arytmetycznym (b_n) o pierwszym wyrazie równym $b_1 = a_1 = 12 - 29\sqrt{3}$ i różnicy $2\sqrt{3}$. Zatem $b_{30} = a_{59} = (12 - 29\sqrt{3}) + 58\sqrt{3} = 12 + 29\sqrt{3}$. Aby obliczyć sumę trzydziestu pierwszych wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych, trzeba skorzystać ze wzoru na sumę n wyrazów ciągu arytmetycznego. Po oznaczeniu tej sumy przez S otrzymamy: $S = \frac{(12 - 29\sqrt{3}) + (12 + 29\sqrt{3})}{2}\cdot 30 = 360$.	0–3
	Istotny postęp: Zauważenie, że po przemnożeniu drugiej równości w rekurencyjnym określeniu ciągu przez $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ uzyskamy ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie równym $12 - 29\sqrt{3}$ i różnicy $\sqrt{3}$.	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Ustalenie wartości $a_{59} = 12 + 29\sqrt{3}$, czyli trzydziestego wyrazu o nieparzystym numerze.	2
	Rozwiązanie pełne: Obliczenie wartość sumy trzydziestu początkowych wyrazów ciągu, o numerach nieparzystych $S = \frac{(12 - 29\sqrt{3}) + (12 + 29\sqrt{3})}{2}\cdot 30 = 360$.	3

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
11.	Oznaczmy przez a długość krawędzi ostrosłupa – wówczas wysokość każdej z jego ścian bocznych ma długość $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Dwie wysokości sąsiednich ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka leżącego naprzeciw podstawy ostrosłupa i odcinek łączący spodki tych wysokości tworzą trójkąt równoramienny. Podstawa tego trójkąta ma długość $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ – połowa długości przekątnej podstawy ostrosłupa. Cosinus szukanego kąta α to cosinus kąta leżącego naprzeciw tego odcinka. Z twierdzenia cosinusów otrzymujemy więc, że cosinus szukanego kąta można obliczyć, rozwiązując równanie: $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha$ Po przekształceniu równoważnie ostatniej równości: $\frac{a^2}{2}=\frac{3a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}-\frac{3a^2}{2}\cos\alpha$ Stąd zaś: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$	0–3
	Istotny postęp: Wyznaczenie długości boków trójkąta, w którym znajduje się kąt między wysokościami ścian bocznych: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie równości wynikającej z twierdzenia cosinusów, z której będzie można wyliczyć cosinus szukanego kąta: $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha$	2
	Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie wartości cosinusa szukanego kąta: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$	3
12.	Z twierdzenia o reszcie otrzymanej przy dzieleniu wielomianu przez dwumian zastosowanego do wielomianu $f(x)=x^3+bx^2-2x+c$ podzielonego przez dwumian $x-1$ otrzymujemy, że $f(1)=1^3+b\cdot1^2-2\cdot1+c=2$. Stąd zaś $b+c=3$. W celu znalezienia współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji $f(x)=x^3+bx^2-2x+c$ należy policzyć pochodną tej funkcji: $f'(x)=3x^2+2bx-2$. Wartość współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji w punkcie o odciętej $x=-1$ wynosi -6. Stąd zaś otrzymujemy równość $f'(-1)=-6$. Zatem $3\cdot(-1)^2+2b\cdot(-1)-2=-6$, czyli $b=3\frac{1}{2}$. A stąd $3\frac{1}{2}+c=3$, czyli $c=-\frac{1}{2}$.	0–4
	Postęp: Skorzystanie z twierdzenia o reszcie otrzymanej przy dzieleniu wielomianu przez dwumian w celu ułożenia równości wyrażającej związek między współczynnikami b i c wielomianu $f(x)=x^3+bx^2-2x+c$. Uzyskanie równości $b+c=3$.	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Obliczenie wartości pochodnej funkcji: $f'(x)=3x^2+2bx-2$	2
	Istotny postęp: Ułożenie warunku wyrażającego wartość współczynnika kierunkowego funkcji w punkcie o danej odciętej: $f'(-1)=-6$	3
	Rozwiązanie pełne: Wyznaczenie wartości współczynników b i c: $b=3\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{2}$	4

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
13.	Należy przekształcić daną nierówność równoważnie: $\frac{\sin x-1}{\sin x-2}-\frac{\sin x-2}{\sin x-3}\geq-\frac{1}{2}\ /\cdot 2(\sin x-2)(\sin x-3)$ $2(\sin x-1)(\sin x-3)-2(\sin x-2)^2\geq-(\sin x-2)(\sin x-3)$ $2\sin^2 x-8\sin x+6-2\sin^2 x+8\sin x-8\geq-\sin^2 x+5\sin x-6$ $\sin^2 x-5\sin x+4\geq 0$ Zauważmy, że nierówność $\sin^2 x-5\sin x+4\geq 0$ można zapisać w następujący sposób: $\sin^2 x-4\sin x-\sin x+4\geq 0$, czyli $\sin x(\sin x-4)-(\sin x-4)\geq 0$, a stąd $(\sin x-4)(\sin x-1)\geq 0$. Ponieważ $-1\leq\sin x\leq 1$, więc $\sin x-1\leq 0$ i $\sin x-4<0$. A zatem faktycznie $(\sin x-4)(\sin x-1)\geq 0$. Z prawdziwości ostatniej nierówności wynika prawdziwość równoważnej jej nierówności $\frac{\sin x-1}{\sin x-2}-\frac{\sin x-2}{\sin x-3}\geq-\frac{1}{2}$.	0–3
	Istotny postęp: Doprowadzenie nierówności do równoważnej jej postaci: $\sin^2 x-5\sin x+4\geq 0$	1
	Pokonanie zasadniczych trudności: Zapisanie nierówności w postaci: $(\sin x-4)(\sin x-1)\geq 0$	2
	Rozwiązanie pełne: Zauważenie, że $\sin x-1\leq 0$ i $\sin x-4<0$ i uzasadnienie, że prawdziwa jest nierówność $(\sin x-4)(\sin x-1)\geq 0$, a więc i równoważna jej nierówność: $\frac{\sin x-1}{\sin x-2}-\frac{\sin x-2}{\sin x-3}\geq-\frac{1}{2}$	3
14.	$CO=5$ i $OD=r=3$. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta prostokątnego CON wynika: $CO^2=CN^2+ON^2$. Zatem $5^2=CN^2+3^2$. Stąd $CN=4$. Ponieważ $CN=CM$, więc $CM=4$. Należy zauważyć teraz, że trójkąt CON jest podobny do trójkąta CDB, gdyż oba trójkąty są prostokątne i mają kąt wspólny przy wierzchołku C. Stąd równość:  $\frac{CN}{ON}=\frac{DC}{DB}$ Zatem $\frac{4}{3}=\frac{3+5}{DB}$, czyli $DB=6$ Analogicznie $AD=6$. Zatem $AB=12$. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego w trójkącie DCB wynika: $CB^2=CD^2+DB^2$, czyli $CB^2=8^2+6^2=100$. Zatem $CB=AC=10$. Z twierdzenia sinusów zastosowanego w trójkącie ABC: $2R=\frac{AC}{\sin\sphericalangle ABC}$, czyli $2R=\frac{AC}{\frac{DC}{BC}}=\frac{20}{\frac{8}{10}}=25$, a stąd $R=\frac{25}{2}$	0–4
	Postęp: Przyjęcie oznaczeń $CO=5$ i $OD=r=3$ i wyliczenie na ich podstawie długości $CN=CM=4$	1

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Modelowe etapy rozwiązywania zadania</th><th>Liczba punktów</th></tr>
<tr><td></td><td>Istotny postęp:
Zauważenie podobieństwa trójkątów CON i CDB i poprzez ułożenie równości wynikającej z tego podobieństwa $\frac{CN}{ON}=\frac{DC}{DB}$ wyliczenie długości $DB=6$</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Pokonanie zasadniczych trudności:
Wyliczenie długości ramion trójkąta równoramiennego ABC: $CB=AC=10$</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Rozwiązanie pełne:
Skorzystanie z twierdzenia sinusów w celu wyliczenia długości promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC przy wykorzystaniu równości $2R=\frac{AC}{\sin\sphericalangle ABC}$. Znalezienie długości promienia tego okręgu $R=\frac{25}{2}$.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>15.</td><td>Zdarzeniem elementarnym w opisanym doświadczeniu jest wylosowanie dowolnej trójki trzech różnych liczb. Zatem liczba zdarzeń elementarnych wynosi:
$\overline{\overline{\Omega}}=\binom{3n}{3}=\frac{(3n)!}{3!(3n-3)!}=\frac{(3n-2)(3n-1)3n}{6}$
Aby suma wylosowanych trzech liczb była podzielna przez trzy, musi zajść jedna z trzech sytuacji:
1. Wszystkie trzy wylosowane liczby są podzielne przez 3. Wśród liczb ze zbioru $\{1,2,3,\cdots,3n\}$ jest n liczb podzielnych przez 3. Zatem liczba zdarzeń elementarnych odpowiadających tej sytuacji wynosi $\binom{n}{3}$.
2. Wszystkie trzy wylosowane liczby dają z dzielenia przez 3 resztę 1. Wśród liczb ze zbioru $\{1,2,3,\cdots,3n\}$ jest n liczb dających z dzielenia przez 3 resztę 1. Zatem liczba zdarzeń elementarnych odpowiadających tej sytuacji wynosi $\binom{n}{3}$.
3. Wszystkie trzy wylosowane liczby dają z dzielenia przez 3 resztę 2. Wśród liczb ze zbioru $\{1,2,3,\cdots,3n\}$ jest n liczb dających z dzielenia przez 3 resztę 2. Zatem liczba zdarzeń elementarnych odpowiadających tej sytuacji wynosi $\binom{n}{3}$.
Wśród wylosowanych liczb każda daje z dzielenia przez 3 inną resztę. Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających tej sytuacji wynosi n^3.
Prawdopodobieństwo zdarzenia A wylosowania trzech liczb, których suma jest podzielna przez trzy, wynosi więc:
$P(A)=\frac{3\binom{n}{3}+n^3}{\binom{3n}{3}}=\frac{3\cdot\frac{(n-2)(n-1)n}{6}+n^3}{\frac{(3n-2)(3n-1)3n}{6}}=\frac{(n-2)(n-1)+2n^2}{(3n-2)(3n-1)}$</td><td>0–5</td></tr>
<tr><td></td><td>Postęp:
Wyznaczenie liczby zdarzeń elementarnych występujących w opisanym doświadczeniu:
$\overline{\overline{\Omega}}=\binom{3n}{3}=\frac{(3n)!}{3!(3n-3)!}=\frac{(3n-2)(3n-1)3n}{6}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td>Istotny postęp:
Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, takich że reszta z dzielenia przez 3 każdej wylosowanej liczby jest taka sama: $3\binom{n}{3}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td></td><td>Pokonanie zasadniczych trudności:
Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, takich że reszta z dzielenia przez 3 każdej wylosowanej liczby jest inna: n^3</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td>Rozwiązanie prawie pełne:
Zapisanie prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A: $P(A)=\frac{3\binom{n}{3}+n^3}{\binom{3n}{3}}$</td><td>4</td></tr>
</table>

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Rozwiązanie pełne: Doprowadzenie wartości szukanego prawdopodobieństwa do postaci: $P(A)=\frac{(n-2)(n-1)+2n^2}{(3n-2)(3n-1)}$.	5
16.	Należy sprowadzić równanie okręgu do postaci kanonicznej $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$. Zatem jest to okrąg o środku w punkcie $O=(4;3)$ i promieniu $R=5$. Znajdźmy teraz punkty przecięcia okręgu i prostej $-2x+y=0$. W tym celu wystarczy rozwiązać układ równań: $\begin{cases}(x-4)^2+(y-3)^2=5^2\\ -2x+y=0\end{cases}$ Rozwiązaniem tego układu równań są pary liczb: $\begin{cases}x=4\\ y=8\end{cases}$ i $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ Druga podstawa trapezu jest zawarta w prostej równoległej do prostej $-2x+y=0$ i przechodzącej przez środek okręgu $O=(4,3)$. Stąd równanie tej prostej to $-2x+y+5=0$. W celu znalezienia współrzędnych końców tej podstawy należy rozwiązać układ równań: $\begin{cases}(x-4)^2+(y-3)^2=5^2\\ -2x+y+5=0\end{cases}$ Rozwiązaniem tego układu równań są pary liczb: $\begin{cases}x=4-\sqrt{5}\\ y=3-2\sqrt{5}\end{cases}$ i $\begin{cases}x=4+\sqrt{5}\\ y=3+2\sqrt{5}\end{cases}$ Długości podstaw tego trapezu: $AB=\sqrt{(4-0)^2+(8-0)^2}=4\sqrt{5}$ $CD=\sqrt{\left(4-\sqrt{5}-\left(4+\sqrt{5}\right)\right)^2+\left(3-2\sqrt{5}-\left(3+2\sqrt{5}\right)\right)^2}=10$ Należy znaleźć odległość między podstawami AB i CD. W tym celu wystarczy obliczyć odległość jednego z wierzchołków trapezu od podstawy, w której ten wierzchołek się nie zawiera. Odległość punktu $S=(0,0)$ od prostej $-2x+y+5=0$ wynosi: $h=\frac{\vert -2\cdot 0+0+5\vert}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\sqrt{5}$ Pole trapezu wynosi więc: $\frac{\left(4\sqrt{5}+10\right)\sqrt{5}}{2}=10+5\sqrt{5}$	0–6
	Postęp: Sprowadzenie równania okręgu do postaci kanonicznej $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$, wyznaczanie jego środka i promienia: $O=(4,3)$ i $R=5$	1
	Istotny postęp: Rozwiązanie układu równań $\begin{cases}(x-4)^2+(y-3)^2=5^2\\ -2x+y=0\end{cases}$, którego rozwiązania są dwoma wierzchołkami jednej z podstaw trapezu.	2
	Istotny postęp: Znalezienie równania drugiej podstawy trapezu przechodzącej przez punkt $O=(4,3)$ i równoległej do podstawy zawartej w prostej $-2x+y=0$, tj. prostej $-2x+y+5=0$.	3
	Pokonanie zasadniczych trudności: Wyznaczenie długości podstaw trapezu: $AB=4\sqrt{5}$, $CD=10$	4
	Rozwiązanie prawie pełne: Obliczenie długości wysokości trapezu jako odległości punktu od prostej: $h=\frac{\vert -2\cdot 0+0+5\vert}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\sqrt{5}$	5

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Rozwiązanie pełne: Wyliczenie pola trapezu: $10+5\sqrt{5}$	6
17.	 Oznaczenia: $AB=BC=AC=a$ – długość boku podstawy O – spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka S $SO=H$ – długość wysokości ostrosłupa P – środek kuli opisanej na ostrosłupie $AP=SP=R=6$ – długość promienia kuli opisanej na ostrosłupie $AO=r$ – długość promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa W trójkącie prostokątnym AOP długość $OP=H-6$ i $r=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego w tym trójkącie otrzymujemy równość: $AO^2+OP^2=AP^2$, czyli $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+(H-6)^2=36$. Stąd zaś $a^2=3\left(12H-H^2\right)$. Zatem objętość ostrosłupa $V=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}H=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}3\left(12H-H^2\right)H=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-H^3+12H^2\right)$. Widzimy więc, że objętość ostrosłupa jest funkcją jego wysokości H i może być przedstawiona w postaci: $V(H)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-H^3+12H^2\right)$, gdzie $H>0$ W celu znalezienia maksimum tej funkcji należy znaleźć jej pochodną $V'(H)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-3H^2+24H\right)$. Można zauważyć, że $V'(H)=0 \Leftrightarrow -3H^2+24H=0 \Leftrightarrow H=0 \vee H=8$. Ponadto $V'(H)>0$ dla $H\in(0,8)$, zaś $V'(H)<0$ dla $H\in(8,+\infty)$. Stąd funkcja $V(H)$ rośnie w przedziale $(0,8)$, natomiast maleje w przedziale $(8,+\infty)$. Zatem dla $H=8$ funkcja $V(H)$ przyjmuje maksimum lokalne równe: $V(8)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-8^3+12\cdot 8^2\right)=64\sqrt{3}$	0–7
	I część: Wyznaczenie wzoru funkcji określającej objętość ostrosłupa: Zapisanie zależności między krawędzią podstawy, a wysokością ostrosłupa: $a^2=3\left(12H-H^2\right)$	1
	Wyznaczenie wzoru na objętość ostrosłupa: $V(H)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-H^3+12H^2\right)$	1
	Zapisanie dziedziny funkcji: $H\in(0,+\infty)$	1
	II część: Zbadanie pochodnej i wyznaczenie ekstremum. Wyznaczenie wzoru pochodnej funkcji objętości: $V'(H)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-3H^2+24H\right)$	1
	Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej: $H=8$	1

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
	Zbadanie znaków pochodnej i zapisanie wniosku dotyczącego minimum funkcji: $V'(H) > 0$ dla $H \in (0, 8)$, zaś $V'(H) < 0$ dla $H \in (8, +\infty)$. Stąd funkcja $V(H)$ rośnie w przedziale $(0, 8)$, natomiast maleje w przedziale $(8, +\infty)$. Zatem dla $H = 8$ funkcja $V(H)$ przyjmuje maksimum lokalne.	1
	Wyznaczenie największej wartości funkcji: $V(8) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-8^3 + 12 \cdot 8^2\right) = 64\sqrt{3}$	1